Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1 : Correction

Exercice 1. (*d'après CCINP TPC 2022*)

Pour l'ensemble de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$.

Partie A - Calculs préliminaires

Q1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \dfrac{c}{t^2-t+1}$.

On part du membre de droite et on met au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1} &= \frac{a(t^2-t+1)+b(2t-1)(1+t)+c(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)}\\ &= \frac{a(t^2-t+1)+b(2t^2+t-1)+c(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)}\\ &= \frac{(a+2b)t^2+(-a+b+c)t+(a-b+c)}{1+t^3}\end{aligned}$$

Par identification avec $\dfrac{1}{1+t^3}$, on obtient le système

$$\begin{cases} a+2b=0\\ -a+b+c=0\\ a-b+c=1\end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff}} \begin{cases} a+2b=0\\ 2c=1\\ -3b+c=1\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a=1/3\\ b=-1/6\\ c=1/2\end{cases}}$$

Q2. Soit la fonction $\Phi\colon t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$. Calculer sa dérivée.

La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.
En utilisant $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{3+(2t-1)^2} = \frac{2}{4t^2-4t+4} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1}}.$$

Q3. Vérifier que $\Phi(1) = -\Phi(0) = \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

On a directement $\Phi(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) == \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\pi}{6} = \boxed{\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}}$.

De plus, $\Phi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ par imparité de arctan, d'où $\boxed{\Phi(0) = -\Phi(1)}$.

Q4. En utilisant les questions précédentes, montrer que $u_1 = \alpha\ln(2) + \beta\pi$. Préciser les valeurs de α et β.

On a

$$\begin{aligned}
u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &\overset{\mathbf{Q1}}{=} \int_0^1 \frac{1}{3}\frac{1}{1+t} - \frac{1}{6}\frac{(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1} \\
&\overset{\mathbf{Q2}}{=} \left[\frac{1}{3}\ln|1+t| - \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \Phi(t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\ln(2) + \Phi(1) - \Phi(0) \\
&\overset{\mathbf{Q3}}{=} \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\
&= \boxed{\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi, \quad \textit{i.e.} \text{ le résultat attendu avec } \alpha = \frac{1}{3} \text{ et } \beta = \frac{1}{3\sqrt{3}}}.
\end{aligned}$$

Partie B - Étude de la suite (u_n)

Q5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $t^3 \geqslant 0$ donc $1+t^3 \geqslant 1$ puis $\left(1+t^3\right)^n \geqslant 1$. On passe alors à l'inverse : $\dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} \leqslant 1$. D'autre part, on a évidemment $\dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n} \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, comme $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$, on obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

Q6. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

Méthode classique ! Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^3\right)^{n+1}} - \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{1+t^3} - 1\right)}_{\leqslant 0} \mathrm{d}t \\
&\leqslant 0 \quad \text{donc } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}.
\end{aligned}$$

Q7. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on ne demande pas de calculer.

C'est une question de cours ! D'après les deux questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente vers une limite } \ell \in \mathbb{R}}$.

Partie C - Étude de la série $\sum u_n$

Q8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1+t)^n} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $t \geqslant t^3$ puis $1+t \geqslant 1+t^3$ et donc $(1+t)^n \geqslant \left(1+t^3\right)^n$. En passant à l'inverse, on obtient $\boxed{\dfrac{1}{(1+t)^n} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n}}$.

Q9. Établir le résultat : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule l'intégrale :
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1+t)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-n+1}(1+t)^{-n+1}\right]_0^1 = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}-1}{1-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{1-n} \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{n}}.$$

Q10. En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, d'après la question précédente, par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t$ est divergente. D'après **Q8** et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$.

Partie D - Étude de la série $\sum \frac{u_n}{n}$

Q11. À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1}).$$
On donnera les expressions de a_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n} = \left(1+t^3\right)^{-n}$ et $v' = 1$, d'où $u' = \frac{-3nt^2}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}$ et $v = t$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$, par intégration par parties, on a
$$\begin{aligned}
u_n &= \left[\frac{t}{\left(1+t^3\right)^n}\right]_0^1 + 3n\int_0^1 \frac{t^3}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}t && +1-1\\
&= \frac{1}{2^n} - 0 + 3n\int_0^1 \frac{1+t^3-1}{\left(1+t^3\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}t && \textit{linéarité intégrale}\\
&= \frac{1}{2^n} + 3n\left(\int_0^1 \frac{\cancel{1+t^3}}{\left(1+t^3\right)^{n+\cancel{1}}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{2^n} + 3n(u_n - u_{n+1})},
\end{aligned}$$
d'où le résultat souhaité avec $\boxed{a_n = \frac{1}{2^n} \text{ et } b_n = 3n}$.

Q12. Établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$. On note S sa somme.

Méthode 1 : Pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{1}{n2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Or la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente (car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$) donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n2^n} \text{ converge}}$.

Méthode 2 : Pour $n \geqslant 1$, on pose $w_n = \frac{1}{n2^n} > 0$. On a
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{n}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$
D'après la règle de d'Alembert, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n2^n} \text{ converge}}$.

Q13. Déduire des questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{u_n}{n}$ converge et calculer sa somme (on l'exprimera en fonction de S défini à la question précédente et de ℓ défini à la question **Q7**.

D'abord, d'après **Q11**, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{1}{n2^n}+3(u_n-u_{n+1})$.
D'après la question précédente, $\dfrac{1}{n2^n}$ est le terme général d'une série convergente.
De plus, u_n-u_{n+1} est le terme général d'une série télescopique convergente car la suite (u_n) est convergente d'après **Q7** (refaire le télescopage si nécessaire).
Par linéarité, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum \frac{u_n}{n} \text{ est convergente}}$.
Enfin, par linéarité (toutes les séries impliquées convergent),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}+3\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{n+1}) && \textit{Q12 + télescopage et Q7}\\
&= S+3(u_1-\ell) && \textit{Q4}\\
&= S+3\left(\frac{1}{3}\ln(2)+\frac{1}{3\sqrt{3}}\pi-\ell\right)\\
&= \boxed{S+\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}-3\ell}.
\end{aligned}$$

Partie E - Calcul de S (*Partie à ne traiter que si vous faites le devoir niveau 2.*)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[$ par $f(x)=\ln(1-x)$.

Q14. Déterminer, pour tout $x<1$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.

Par récurrence, on montre que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x<1,\ f^{(n)}(x)=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}}$.

Q15. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange avec la fonction f sur un intervalle bien choisi, déterminer la valeur de S définie à la question **Q12**.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0\,;\frac{1}{2}]$ et, d'après la question précédente, pour tout $x\in[0\,;\frac{1}{2}]$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right|=\left|-\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right|\leqslant n!$. Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\frac{1}{2}]$, on a

$$\left|f\left(\tfrac{1}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^k}{k!}f^{(k)}(0)\right|\leqslant n!\frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Avec l'expression des dérivées obtenue à la question précédente et $\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$, il reste

$$\left|-\ln 2+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k2^k}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Comme le résultat est valable pour tout entier naturel n et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}=0$, par encadrement on obtient $\boxed{S=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k2^k}=\ln 2}$. (Au passage, on a de nouveau la convergence de la série précédemment obtenue en **Q12**.)